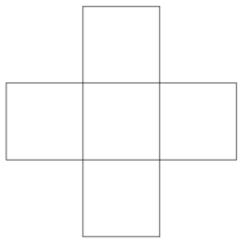
XXIV. NEMZETKÖZI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
Szabadka, 2015. április 8-12.

<u>IX. évfolyam</u>

1. Egy 20×20-as négyzetháló négyzeteibe a bal felső mezőből indulva soronként sorra beirjuk az $1,2,3,\ldots,400$ pozitív egész számokat. Ezután a táblázat négyzeteiből az ábrán látható kereszt alakú síkidommal mindig ötöt letakarunk az összes lehetséges módon. Hányszor lesz a letakart öt szám összege négyzetszám? Milyen szám áll ezekben az esetekben a kereszt közepén?



2. Egy háromjegyű számot osztva a számjegyeinek összegével 37-et kapunk. Ha e háromjegyű számhoz hozzáadunk 297-et, a megfordított (felcserélt sorrendben felírt) számjegyekből álló számot kapjuk. Mely háromjegyű számok esetében lehetséges ez?

3. Hány megoldása van a prímszámok halmazában a $p^2+q^2+r^2+s^2=pqrs+4$ egyenletnek?

4. Egy ABC háromszögben $A\angle=60°$. Legyenek rendre az M és N pontok az AB és AC oldalak olyan pontjai, melyekre $AM=CN$. Az MN szakasz felezőpontja legyen F_1, míg az AC oldal felezőpontja F_2. Bizonyítsd be, hogy

$$F_1F_2=\frac{1}{2}\cdot AM\,.$$

5. Keresd meg az összes olyan pozitív egészekből álló (x,y,z) számhármast, amelyre érvényes, hogy

$$x\,|\,(y+1),\ 2y\,|\,(z+2) \text{ és } 3z\,|\,(x+3).$$

6. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja M. Igazold, hogy ha $MC=AB$, akkor az $ACB\angle=45°$. Igaz-e az állítás tompaszögű háromszögben is?

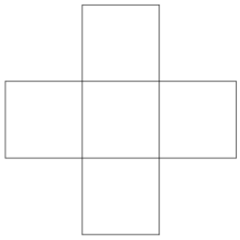
A feladatok kidolgozására 240 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XXIV. NMMV FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – IX. évfolyam

IX/1. Egy 20×20-as négyzetháló négyzeteibe a bal felső mezőből indulva soronként sorra beirjuk az $1,2,3,\ldots,400$ pozitív egész számokat. Ezután a táblázat négyzeteiből az ábrán látható kereszt alakú síkidommal mindig ötöt letakarunk az összes lehetséges módon. Hányszor lesz a letakart öt szám összege négyzetszám? Milyen szám áll ezekben az esetekben a kereszt közepén?

(*Nemecskó István, Budapest, Magyarország*)



Megoldás: Ha a kereszt közepső mezőjében k áll, akkor az öt mező összege $5k$. Ha ez négyzetszám, akkor $5\,|\,k$ teljesül. A középső mező viszont nem lehet a tábla szélén, ezért: $20 < k < 380$, valamint $k \neq 20i$, ha $i = 1,2,\ldots,20$, és $k \neq 20j+1$, ha $j = 0,1,\ldots,19$. Mivel $5k$ négyzetszám, így $k = 5\cdot l^2$ alakú, ahol l természetes szám. Az előző feltételek miatt adódik, hogy $4 < l^2 < 76$, ebből pedig $2 < l < 9$.
$l = 3$ esetén $k = 5\cdot 3^2 = 45$, ami teljesíti a feltételt.
$l = 4$ esetén $k = 5\cdot 4^2 = 80$, ami nem teljesíti a feltételt.
$l = 5$ esetén $k = 5\cdot 5^2 = 125$, ami teljesíti a feltételt.
$l = 6$ esetén $k = 5\cdot 6^2 = 180$, ami nem teljesíti a feltételt.
$l = 7$ esetén $k = 5\cdot 7^2 = 245$, ami teljesíti a feltételt.
$l = 8$ esetén $k = 5\cdot 8^2 = 320$, ami nem teljesíti a feltételt.
A megfelelő értékek tehát $l = 3$, $l = 5$ és $l = 7$, s így a letakart keresztek középső mezői, rendre, 45, 125 és 245 lehetnek.

IX/2. Egy háromjegyű számot osztva számjegyeinek összegével 37-et kapunk. Ha e háromjegyű számhoz hozzáadunk 297-et, a megfordított (felcserélt sorrendben felírt) számjegyekből álló számot kapjuk. Mely háromjegyű számok esetében lehetséges ez?

(*Kovács Béla, Szatmárnémeti, Erdély*)

Megoldás: Legyen a háromjegyű szám $100a+10b+c$. Az első feltétel alapján adódik $100a+10b+c = 37(a+b+c)$, innen pedig $63a = 27b+36c$. Elosztva 9-cel a kapott egyenletet, kapjuk a $7a = 3b+4c$ összefüggést. A második feltétel alapján adódik a $100a+10b+c+297 = 100c+10b+a$ egyenlet, innen pedig $99a+297 = 99c$, amely 99-cel osztva adja az $a+3 = c$ összefüggést. Az első egyenlőségbe helyettesítve kapjuk, hogy $7a = 3b+4(a+3)$, ahonnan $3a = 3b+12$, amely 3-mal osztva adja az $a = b+4$ egyenlőséget. Tehát: $a = b+4$ és $c = b+7$. Mivel a,b,c számjegyek, ezért b lehetséges értékei: 0, 1 vagy 2.
Ha $b = 0$, akkor $a = 4$ és $c = 7$, a keresett háromjegyű szám pedig a 407.
Ha $b = 1$, akkor $a = 5$ és $c = 8$, a keresett háromjegyű szám pedig az 518.
Ha $b = 2$, akkor $a = 6$ és $c = 9$, a keresett háromjegyű szám pedig a 629.
A keresett háromjegyű számok tehát: 407, 518 és 629.

$$407:11 = 37 \text{ és } 704-407 = 297,$$
$$518:14 = 37 \text{ és } 815-518 = 297,$$
$$629:17 = 37 \text{ és } 926-629 = 297.$$

IX/3. Hány megoldása van a prímszámok halmazában a $p^2+q^2+r^2+s^2=pqrs+4$ egyenletnek?

(*Mészáros József, Galánta, Felvidék*)

Megoldás: Mind a négy prímszám nem lehet páratlan. Tegyük fel, hogy $s=2$. Ekkor

$$p^2+q^2+r^2=2pqr\,.$$

A megmaradt prímszámok sem lehetnek mind páratlanok, mert akkor a bal oldal páratlan volna a jobb oldal pedig páros. Legyen $r=2$. Ekkor

$$p^2+q^2+4=4pq\,,\quad \text{illetve}\quad p^2+q^2=4(pq-1)\,.$$

A bal oldali kifejezés miatt p és q paritása megegyező kell, hogy legyen. Ha mindkettő páratlan volna, akkor $p^2=4k+1$ és $q^2=4l+1$ alakú, ahol k és l valamilyen pozitív egész számok. Ekkor viszont a $p^2+q^2=4(pq-1)$ egyenlet bal oldala $4m+2$ alakú, ahol m pozitív egész szám, a jobb oldala pedig 4 többszöröse. Következésképpen csak a $p=q=2$ eset lehetséges. Ekkor viszont $4+4=4\cdot 3$, ami ellentmondás, tehát az adott egyenletnek nincs a feladat feltételeit kielégítő megoldása.

IX/4. Egy ABC háromszögben $A\angle=60°$. Legyenek rendre az M és N pontok az AB és AC oldalak olyan pontjai, melyekre $AM=CN$. Az MN szakasz felezőpontja legyen F_1, míg az AC oldal felezőpontja F_2. Bizonyítsd be, hogy

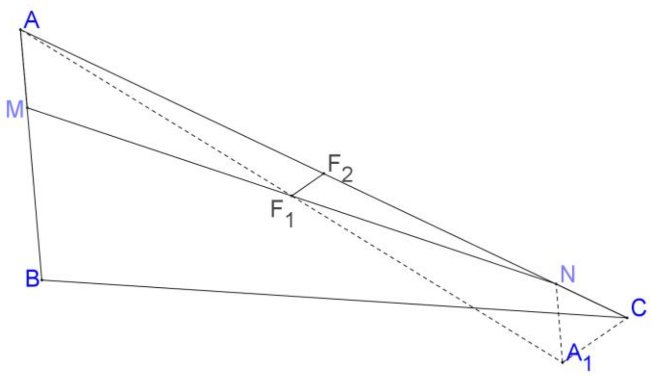
$$F_1F_2=\frac{1}{2}\cdot AM\,.$$

(*Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy, Erdély*)

I.Megoldás: Tekintsük az A csúcsnak az F_1 pontra vonatkozó A_1 szimmetrikus képét. (lásd az ábrát) A feltevést is figyelembe véve, az AMA_1N négyszög paralelogramma.

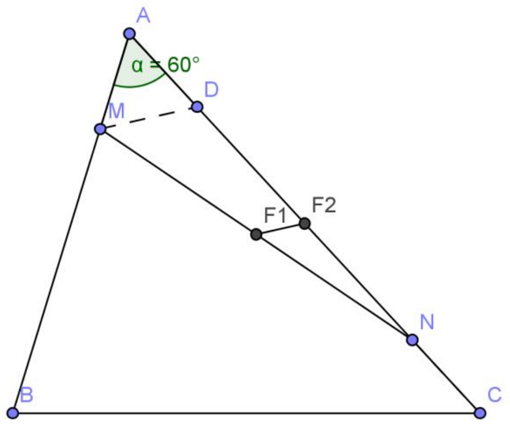
Így $AM=A_1N$ és $AM\parallel A_1N$. Emiatt $A_1N=NC$ és $BAC\angle=A_1NC\angle=60°$, ahonnan következik, hogy az $A_1NC\Delta$ szabályos. Következésképpen $A_1C=NC=AM$.

Végezetül: F_1F_2 középvonal az AA_1C háromszögben, s ebből az következik, hogy $F_1F_2=\frac{1}{2}\cdot A_1C=\frac{1}{2}\cdot AM$, amit igazolni kellett.



II.Megoldás: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $ABC\Delta$ hegyesszögű, és az AB oldala hosszabb az AC oldalnál. A háromszög AC oldalán vegyünk fel egy D pontot úgy, hogy $AM = AD$ legyen. Ekkor az $AMD\Delta$ egyenlő oldalú, ugyanis $AM = AD$, valamint az A csúcsban lévő szög $60°$. Mivel az F_2 pont az AC szakasz felezőpontja, és $AD = AM = CN$, így az F_2 pont a DN szakasznak is a felezőpontja. Az $MND\Delta$ -ben ezek alapján F_1F_2 a háromszög középvonala, vagyis

$$F_1F_2 = \frac{1}{2} \cdot MD.$$



Figyelembe véve az $AMD\Delta$ egyenlő oldalú voltát megkapjuk a feladat bizonyítandó állítását:

$$F_1F_2 = \frac{1}{2} \cdot MD = \frac{1}{2} \cdot AM.$$

Megjegyzés: ha a CN szakasz hossza nagyobb a CF_2 szakaszétól, a feladat megoldása akkor is hasonlóan alakul a fentiekhez.

IX/5. Keresd meg az összes olyan pozitív egészekből álló (x, y, z) számhármast, amelyre érvényes, hogy $x \mid (y+1)$, $2y \mid (z+2)$ és $3z \mid (x+3)$.

(*Kekeňak Szilvia, Kassa, Felvidék*)

Megoldás: Az $x \mid (y+1)$, $2y \mid (z+2)$ és $3z \mid (x+3)$ feltételekből következik, hogy

$$x \le y+1,\ 2y \le z+2 \text{ és } 3z \le x+3.$$

Szorozzuk be az első egyenlőtlenséget 2-vel és alkalmazzuk egymás után az első két egyenlőtlenséget. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$2x \le 2y+2 \le z+4, \text{ illetve hogy } 2x-4 \le z.$$

Figyelembe véve a $2x-4 \le z$ és a $3z \le x+3$ egyenlőtlenségeket adódik, hogy

$$3(2x-4) \le 3z \le x+3, \text{ azaz } 3(2x-4) \le x+3.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség megoldása $x \le 3$. A $3z \mid (x+3)$ feltételből következik, hogy $3 \mid (x+3)$, ezért $3 \mid x$, így az $x \le 3$ feltételt is figyelembe véve adódik, hogy $x = 3$.

Figyelembe véve a $3z \mid (x+3)$ feltételt, azt kapjuk, hogy $3z \mid 6$, vagyis $z \mid 2$.

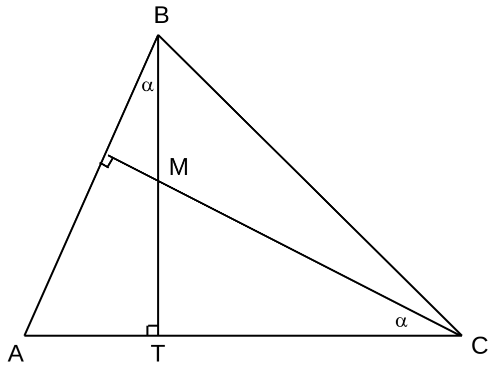
Mivel $2y \mid (z+2)$ alapján z biztosan páros szám, így $z = 2$.

Visszahelyettesítve a kapott értékeket a $2x \le 2y+2 \le z+4$ egyenlőtlenségbe, adódik, hogy $6 \le 2y+2 \le 6$, ahonnan $y = 2$.

A feladat egyetlen megoldása tehát a $(3, 2, 2)$ számhármas.

IX/6. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja M. Igazold, hogy ha $MC = AB$, akkor az $ACB\angle = 45°$. Igaz-e az állítás tompaszögű háromszögben is?
(*Katz Sándor, Bonyhád, Magyarország*)

Megoldás:
Az ábrán α-val jelölt ABT és TCM szögek egyenlők, mert merőleges szárú hegyesszögek.
A feladat feltétele szerint az AB és MC szakaszok egyenlők, ezért az ATB és MTC derékszögű háromszögek egybevágók, mert egyenlők az átfogóik és a szögeik. Így az α szög melletti befogók is egyenlők, azaz $BT = TC$. Tehát a BTC derékszögű háromszög egyenlő szárú, ezért $ACB\angle = 45°$.



Ha a háromszög tompaszögű, és a tompaszög A-nál vagy B-nél van, akkor a fenti megoldással azonos módon igazolható, hogy $ACB\angle = 45°$.
Ha viszont C-nél van a tompaszög, akkor $MC = AB$ teljesülhet, de nyilván $ACB\angle = 45°$ nem teljesülhet.
Az α-val jelölt szögek most is merőleges szárúak, ezért egyenlők, és ha $MC = AB$, akkor az MTC és ATB derékszögű háromszögek egybevágók. Ezért az α-val szemközti oldalak egyenlők, azaz $BT = TC$, tehát a BTC háromszög itt is egyenlő szárú, derékszögű, így itt $TCB\angle = 45°$. Tehát most $ACB\angle = 135°$.